

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор-проректор
по научной работе

_____ А.В. Коржов

” ____ ” _____ 2022 г.

ПРОГРАММА

кандидатского экзамена по специальной дисциплине

1.1.1. – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Разработчик:

1. Заляпин Владимир Ильич, к.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры МАиМПП

Челябинск 2022 г.

ПРОГРАММА
экзамена по специальности
1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Основные разделы – действительный анализ, комплексный анализ, функциональный анализ

Вопросы для подготовки

1. Действительный анализ

Меры, измеримые функции, интеграл. Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стильтьеса.

Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

Гладкие многообразия и дифференциальные формы. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

2. Комплексный анализ

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами.

Целые и мероморфные функции. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

Аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

Гармонические функции. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L_p . Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

Линейные функционалы и линейные операторы. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература

- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976 (1981).
Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (1989).
Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967—1968.
Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975 (1991).
Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (1999).
Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V. М.: Физматгиз, 1959.
Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976 (1985).

Дополнительная литература

- Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.
Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высш. школа, 1999.
Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

Условие допуска к экзамену

К процедуре экзамена по специальности допускается соискатель ученой степени кандидата наук, имеющий профильное высшее профессиональное образование, соответствующее специальности 1.1.1. “Действительный, комплексный и функциональный анализ”, выполнивший учебный план и подготовивший отчет о результатах своей научной и педагогической деятельности..

Соискатель ученой степени кандидата наук, имеющий высшее профессиональное образование, не соответствующее отрасли науки, по которой подготовлена диссертация, сдает дополнительный кандидатский экзамен по общенаучной применительно к данной отрасли науки дисциплине. Если диссертационное исследование проводилось на стыке двух специальностей, экзамен сдается по специальности, шифр которой стоит первым в автореферате диссертации. Вопросы по второй научной специальности включаются в дополнительную программу кандидатского экзамена.

Процедура проведения экзамена

Сроки проведения экзамена по специальности устанавливаются приказом ректора. В случае представления экзаменуемым диссертации в Совет по защита диссертаций, кандидатский экзамен может быть организован и в другие сроки.

Процедура экзамена складывается из двух частей. Первая часть – письменный ответ экзаменуемого на предложенные ему вопросы и задания по программе. Как правило, экзаменуемому предлагается два теоретических вопроса и две задачи. На подготовку и выполнение экзаменационного задания отводится два академических часа.

Получившие положительную оценку после проверки письменного варианта допускаются к сдаче второй части экзамена, которая проводится на следующий день.

Вторая часть – устный экзамен-собеседование по основной программе, приведенной выше, и дополнительной программе, соответствующей тематике диссертационной работы аспиранта.

Дополнительные программы разрабатываются комиссией по приему экзаменов с привлечением ведущих специалистов ИЕТН и утверждаются ученым Советом ИЕТН. Собеседование может проводиться как в форме устного экзамена по заранее подготовленным билетам, так и в форме свободной беседы.

Решение об оценке ответа экзаменуемого (*отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно*) принимается большинством голосов членов экзаменационной комиссии. При этом голос председателя комиссии (или, в отсутствие председателя, заместителя председателя) считается как два голоса. .

Экзаменуемый считается успешно сдавшим экзамен, если он дал ответ на не менее 60% предложенных ему заданий.